

# 2<sup>do</sup> Taller LATino Iberoamericano de Investigación de Operaciones

“La IO aplicada a la solución de problemas regionales”

## Sobre el uso del problema de complementariedad lineal extendido para el control óptimo de semáforos

S. Allende Alonso

Universidad de la Habana (La Habana-Cuba)

C. S. Lema Fernández

L. P. Pedreira Andrade

Universidade da Coruña (A Coruña-España)

**Resumen:** En el trabajo titulado “Modelo de optimización con restricciones de equilibrio para el control de semáforos” que presentamos en la 7th International Conference on Operations Research (2006) analizábamos un problema de control óptimo de semáforos para un cruce de dos carreteras con los dos sentidos de circulación; allí interpretábamos las restricciones del problema como un problema de complementariedad lineal extendido (ELCP). También proponíamos un método híbrido de solución (basado en una propiedad que demostraba que mediante un cambio de variable adecuado, las restricciones de ELCP describen un problema de complementariedad lineal (LCP)) que combina la solución exacta del LCP y una heurística aleatorizada. Nos interesa pues, estudiar bajo que condiciones dichos problemas tienen solución y además única. Así (extraídas de la literatura) desarrollamos tres propiedades importantes para los ELCP y como caso particular para los LCP: a) La propiedad de suficiencia en columnas que caracteriza la convexidad del conjunto solución. b) La propiedad de suficiencia en filas que describe una clase importante de pares de matrices (respecto a  $K$ ) para las cuales la factibilidad del  $ELCP(M,N,K)$  implica su solucionabilidad. c) La P-propiedad (que para el caso del  $LCP(M,q)$  significa que  $M$  ha de ser una P-matriz), que caracteriza la unicidad de solución.

**Abstract:** In the paper titled "Optimization model with equilibrium constraints for traffic lights control" that we presented at the 7th International Conference on Operations Research (2006) we studied the optimal traffic light control problem at the intersection of two-way streets. We then interpreted the constraints of the problem as an extended linear complementarity problem (ELCP). We also proposed a hybrid method of solution (based on a property that demonstrates that through a suitable change of variable, the constraints of

ELCP describe a linear complementarity problem (LCP)) that combines the exact solution of the LCP and a randomized heuristic. We were then interested in studying the conditions in which these fore mentioned problems have a unique solution. Thus (extracted of literature) we developed three important properties for the ELCP and a specific case for the LCP: a) The property of sufficiency in columns that characterizes the convexity of the solution set. b) The property of sufficiency in rows that describes an important class of sets of matrices (with respect to  $K$ ) for which feasibility of  $ELCP(M,N,K)$  implies its solvability. c) The P-property (in the context of the  $LCP(M,q)$  means that  $M$  has to be a P-matrix), that characterizes the uniqueness of the solution.

Keywords: Linear complementarity problem, extended linear complementarity problem, P-property.

### 1. Introducción. De KKT a los LCP

La teoría de los programas matemáticos con restricciones de desigualdad se desarrolló a partir de 1951 por H. W. Kuhn y A. W. Tucker. Ellos enuncian un teorema que ya había sido demostrado con anterioridad por William Karush en su tesis doctoral, pero que nunca había publicado. El teorema establece condiciones necesarias de optimalidad local para programas del tipo:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{sujeto a} & h_1(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \\ & h_2(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \\ & \dots\dots\dots \\ & h_m(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \end{array}$$

donde  $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $h=(h_1, \dots, h_m)$  son diferenciables. Tales condiciones (KKT) vienen dadas,

para puntos que cumplen una cierta condición de regularidad, por:

- i)  $\nabla f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x) = 0$
- ii)  $h_i(x) \geq 0, i=1, \dots, m$
- iii)  $\lambda_i h_i(x) = 0, i=1, \dots, m$
- iv)  $\lambda_i \geq 0, i=1, \dots, m$

donde  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ .

En la búsqueda de métodos para resolver este sistema, se abordó el caso cuadrático

$\min_{x \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} x^T M x + q x \right\}$  donde M es una matriz cuadrada simétrica de orden n y  $q \in \mathbb{R}^n$ . En este caso las condiciones son:

- i)  $x_i \geq 0, i=1, \dots, n$
- ii)  $(Mx + q)_i \geq 0, \text{ si } x_i = 0$
- iii)  $(Mx + q)_i = 0, \text{ si } x_i > 0$

es decir, se trata de encontrar x en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $Mx + q \geq 0, x \geq 0, x^T(Mx + q) = 0$ . Este es el origen de la definición del problema de complementariedad lineal (LCP) [1].

## 2. El problema de complementariedad lineal y algunas generalizaciones

**2.1 Definición.-** El problema de complementariedad lineal (LCP), está definido así:

Dada una matriz  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y un vector  $q \in \mathbb{R}^n$ , hallar dos vectores  $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ , tales que:

$$\begin{aligned} y &= q + Mx \\ x^T y &= 0. \end{aligned}$$

Denotamos este LCP así: LCP(M,q).

El nombre proviene de la condición  $x^T y = 0$  que se llama condición de complementariedad ya que requiere que al menos una de las variables del par  $(x_j, y_j)$  sea igual a cero en la solución del problema, para  $j=1, \dots, n$ . El par  $(x_j, y_j)$  se suele llamar j-ésimo par de complementariedad en el problema, y además para cada j, la variable  $x_j$  se conoce como el complemento de  $y_j$  y viceversa.

Teniendo en cuenta el origen de la definición del problema de complementariedad lineal, se ve claramente que éste tiene asociado el siguiente programa cuadrático:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } & x^T(q + Mx) \\ \text{sujeto a } & x \geq 0 \\ & q + Mx \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Algunas generalizaciones del problema de complementariedad lineal son:

**2.2 Definición.-** El problema de complementariedad lineal horizontal (HLCP), está definido así:

Dadas dos matrices  $M, N \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y un vector  $q \in \mathbb{R}^m$ , encontrar dos vectores  $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ , tales que:

$$\begin{aligned} Ny - Mx &= q \\ x^T y &= 0 \end{aligned}$$

Denotamos este HLCP así: HLCP(M,N,q). Se ve claramente que si  $m=n$  y  $N=I$ , el HLCP se convierte en un LCP(M,q).

**2.3 Definición.-** El problema de complementariedad lineal vertical (VLCP), está definido así:

Para  $i=1, \dots, n$  sea  $m_i$  un entero positivo,  $m = \sum_{i=1}^n m_i$

y sean  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}, q \in \mathbb{R}^m$  particionadas así:

$$M = \begin{pmatrix} M^1 \\ \vdots \\ M^n \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{pmatrix} \text{ donde para } i=1, \dots, n,$$

$M^i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}, q^i \in \mathbb{R}^{m_i}$ . Con estos datos, el problema consiste en encontrar  $x \in \mathbb{R}_+^n$  tal que:

$$\begin{aligned} q + Mx &\geq 0 \\ x_i \prod_{j=1}^{m_i} (q^j + M^j x) &= 0 \quad i=1, \dots, n. \end{aligned}$$

Si  $m_i = 1$  para todo i, entonces el VLCP se convierte en LCP.

**2.4 Definición.-** El problema de complementariedad lineal mixta (MLCP), está definido así:

Dadas las matrices  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{m \times k}, C \in \mathbb{R}^{k \times n}, D \in \mathbb{R}^{k \times k}$ , y los vectores  $a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^k$ , encontrar dos vectores  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k$  tales que:

$$\begin{aligned} Au + Bx + a &= 0 \\ Cu + Dx + b &\geq 0 \\ x &\geq 0 \\ x^T(Cu + Dx + b) &= 0 \end{aligned}$$

Denotamos este MLCP así: MLCP(A,B,C,D,a,b).

El MLCP es una mezcla de un LCP y un sistema de ecuaciones lineales, las cuales corresponden a las variables sin restricciones  $u$ . Si  $m=n=k$  y  $A$  es no singular, podemos despejar  $u$  de dichas ecuaciones,  $u = -A^{-1}(Bx + a)$  y entonces el MLCP se convierte en un LCP( $D - CA^{-1}B$ ,  $b - CA^{-1}a$ ). Si  $n=k$  y  $C$  es no singular, entonces el MLCP se convierte en un HLCP( $AC^{-1}D - B$ ,  $AC^{-1}$ ,  $AC^{-1}b - a$ ).

**2.5 Definición.-** El problema de complementariedad lineal generalizado (GLCP) [2], está definido así:

Dadas matrices  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times k}$  y un vector  $q \in \mathbb{R}^m$ , encontrar vectores  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}^k$  tales que:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz &= q \\ (x, y, z) &\geq 0 \\ x^T y &= 0 \end{aligned}$$

**2.6 Definición.-** El problema de complementariedad lineal extendido (ELCP) [3], está definido así:

Dadas dos matrices  $M, N \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y dado  $K$  un conjunto poliédrico de  $\mathbb{R}^m$ , hallar dos vectores  $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ , tales que:

$$\begin{aligned} Mx - Ny &\in K \\ x^T y &= 0 \end{aligned}$$

Denotamos este ELCP así:  $\text{ELCP}(M, N, K)$ . Cuando  $m = n$ ,  $N = I$  y  $K = \{-q\}$ , este problema se reduce al LCP( $M, q$ ).

### 3. El problema de complementariedad lineal extendido (ELCP)

**3.1 Teorema.-**[4] El GLCP y el ELCP son equivalentes.

Demostración.-

Para  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ,  $q \in \mathbb{R}^m$  el problema GLCP se convierte en  $\text{ELCP}(A, -B, K)$ , si definimos  $K = \{q - Cz / z \geq 0\}$ . Por otro lado, si tenemos un  $\text{ELCP}(M, N, K)$ , como  $K$  es un conjunto poliédrico, para alguna matriz  $L \in \mathbb{R}^{k \times m}$  y algún vector  $b \in \mathbb{R}^k$ , podemos escribir  $K = \{u \in \mathbb{R}^m / Lu \geq b\}$ . Entonces el  $\text{ELCP}(M, N, K)$  se convierte en un GLCP si consideramos  $m = k$ ,  $A = LM$ ,  $B = -LN$ ,  $C = -I$  y  $q = b$ .

**3.2 Definición.-** Asociado al  $\text{ELCP}(M, N, K)$  podemos definir un programa bilineal

$$\begin{aligned} \text{minimizar } & x^T y \\ \text{sujeto a: } & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \\ & Mx - Ny \in K \end{aligned}$$

Denotamos este problema por:  $\text{BLP}(M, N, K)$ .

**3.3 Observación.-** En (1) habíamos expuesto el programa cuadrático asociado al LCP( $M, q$ ); éste está definido sólo para la variable  $x$ , mientras que el  $\text{BLP}(M, N, K)$  involucra al par  $(x, y)$ . Sin embargo el  $\text{BLP}(M, N, K)$  juega un papel similar en el estudio del  $\text{ELCP}(M, N, K)$  como el que jugaba (1) en el tratamiento del LCP( $M, q$ ). Como la función objetivo del  $\text{BLP}(M, N, K)$  es claramente no negativa sobre la región factible del  $\text{ELCP}(M, N, K)$ , es decir sobre  $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{2n} / Mx - Ny \in K\}$ , el  $\text{ELCP}(M, N, K)$  es equivalente al  $\text{BLP}(M, N, K)$  en el sentido de que un par de vectores  $(x, y)$  resuelve el  $\text{ELCP}(M, N, K)$  si y sólo si  $(x, y)$  es una solución óptima global del  $\text{BLP}(M, N, K)$  con un valor de la función objetivo igual a cero. Además por el teorema de Frank-Wolfe de la programación cuadrática [5], el  $\text{BLP}(M, N, K)$  siempre tiene una solución óptima si es factible (es decir si el conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{2n} / Mx - Ny \in K\}$  es no vacío). Lo que no se verifica, en general, es que en la solución óptima del  $\text{BLP}(M, N, K)$  el valor de la función objetivo sea cero. En lo que sigue [4] estableceremos varios resultados que refuerzan la relación entre el ELCP y su BLP asociado.

**3.4 Definición.-** Dadas matrices  $M, N \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y dado  $K$  un conjunto poliédrico de  $\mathbb{R}^m$  decimos que  $\{M, N\}$  tiene la E-propiedad de suficiencia en columnas con respecto a  $K$  si se verifica:

$$\text{Si } [Mu - Nv \in K - K, u * v \leq 0] \Rightarrow u * v = 0$$

donde  $*$  denota el producto de Hadamard de dos vectores, es decir  $u * v$  es el vector cuya componentes son los productos de las componentes correspondientes de los vectores  $u$  y  $v$ .

**3.5 Observación.-** En el contexto de los LCP( $M, q$ )  $M$  tiene la propiedad de suficiencia en columnas si  $x * Mx \leq 0 \Rightarrow x * Mx = 0$ .

**3.6 Teorema.-** El par  $\{M, N\}$  tiene la E-propiedad de suficiencia en columnas con respecto a  $K$  si y sólo si para cada  $p \in \mathbb{R}^m$ , el conjunto solución del  $\text{ELCP}(M, N, K+p)$  si es no vacío es un conjunto convexo.

Demostración.-

“ $\Leftarrow$ ” Supongamos que la propiedad de suficiencia en columnas falla. Entonces podemos encontrar dos vectores  $u$  y  $v$  tales que  $Mu - Nv \in K - K$ ,  $u * v \leq 0$  y

$u_i v_i < 0$  para algún índice  $i$ . Sean  $Mu - Nv = a - b$  con  $a, b \in K$  y  $p = Mu^+ - Nv^+ - a = Mu^- - Nv^- - b$ , donde  $u^+$  denota el vector que tiene por  $i$ -ésima componente ( $\forall i$ ) el valor máximo calculado entre las  $i$ -ésimas componentes de los vectores  $u$  y  $0$ , mientras que  $u^- = u^+ - u$ . Entonces  $(u^+, v^+)$  y  $(u^-, v^-)$  son soluciones del  $ELCP(M, N, K + p)$  ya que: por definición  $u^+ \geq 0, v^+ \geq 0, u^- \geq 0, v^- \geq 0$ ; como se verifica  $u * v \leq 0$  entonces  $u^{+T} v^+ = 0, u^{-T} v^- = 0; M u^+ - N v^+ = a + p \in K + p, M u^- - N v^- = b + p \in K + p$ . Por tanto el conjunto solución del  $ELCP(M, N, K + p)$  es no vacío, y sin embargo no es convexo, ya que una combinación convexa de esas dos soluciones no es una solución; ahora lo probamos, sea  $t$  entre  $0$  y  $1$ ,  $t(u^+, v^+) + (1-t)(u^-, v^-) = (t u^+ + (1-t) u^-, t v^+ + (1-t) v^-)$  no es una solución pues si lo fuera  $(t u^+ + (1-t) u^-)^T (t v^+ + (1-t) v^-)$  tendría que ser cero y no lo es pues  $u^+ * v^- + u^- * v^+ \neq 0$  debido a que  $u_i v_i < 0$  para algún índice  $i$ .

" $\Rightarrow$ " Supongamos que se verifica la propiedad de suficiencia en columnas. Si  $(x, y), (\bar{x}, \bar{y})$  son dos soluciones del  $ELCP(M, N, K + p)$ , entonces  $(u, v) = (x - \bar{x}, y - \bar{y})$  satisfará que  $Mu - Nv \in K - K, u * v \leq 0$  y por tanto  $u * v = 0$ . Debido a la no negatividad de los vectores  $x, y, \bar{x}, \bar{y}$ , tenemos que  $x * \bar{y} = 0 = y * \bar{x}$ , de donde se sigue que para cualquier  $t$  entre  $0$  y  $1, (tx + (1-t)\bar{x}) * (ty + (1-t)\bar{y}) = 0$ , por tanto cualquier combinación convexa de  $(x, y), (\bar{x}, \bar{y})$  es solución del  $ELCP(M, N, K + p)$ , efectivamente: sea  $t$  entre  $0$  y  $1, t(x, y) + (1-t)(\bar{x}, \bar{y}) = (tx + (1-t)\bar{x}, ty + (1-t)\bar{y})$  es solución del  $ELCP(M, N, K + p)$ , pues debido a la no negatividad de los vectores  $x, y, \bar{x}, \bar{y}$  entonces  $tx + (1-t)\bar{x} \geq 0, ty + (1-t)\bar{y} \geq 0; (tx + (1-t)\bar{x})^T (ty + (1-t)\bar{y}) = 0$  se obtiene de que  $(tx + (1-t)\bar{x}) * (ty + (1-t)\bar{y}) = 0$  y por último  $M(tx + (1-t)\bar{x}) - N(ty + (1-t)\bar{y}) \in K + p$  ya que  $Mx - Ny \in K + p, M\bar{x} - N\bar{y} \in K + p$ .

**3.7 Definición.-** Dadas matrices  $M, N \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y dado  $K$  un conjunto poliédrico de  $\mathbb{R}^m$  decimos que  $\{M, N\}$  tiene la E-propiedad de suficiencia en filas con respecto a  $K$  si se verifica:

Si  $[(M^T u) * (N^T u) \leq 0, u \in (0^+ K)^*] \Rightarrow (M^T u) * (N^T u) = 0$  donde si  $K = \{u \in \mathbb{R}^m / Lu \geq b\}$  para alguna matriz  $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y algún vector  $b \in \mathbb{R}^n, 0^+ K$  denota su cono recesión, es decir  $0^+ K = \{u \in \mathbb{R}^m / Lu \geq 0\}$  y  $(0^+ K)^*$  denota el dual de este cono recesión, es decir  $(0^+ K)^* = \{v \in \mathbb{R}^m / v = L^T \lambda \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{R}_+^n\}$ .

**3.8 Observación.-** En el contexto de los  $LCP(M, q)$ , una matriz cuadrada se dice que tiene la propiedad de suficiencia en filas si  $M^T$  tiene la propiedad de suficiencia en columnas.

**3.9 Definición.-** Dadas dos matrices  $M, N \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , decimos que  $\{\bar{M}, \bar{N}\}$  es un cambio en columnas de  $\{M, N\}$  si para cada índice  $i, \bar{M}_i = M_i$  y  $\bar{N}_i = N_i$ , o  $\bar{M}_i = N_i$  y  $\bar{N}_i = M_i$ ; donde cada subíndice  $i$  se refiere a la columna correspondiente.

**3.10 Teorema.-** El par  $\{M, N\}$  tiene la E-propiedad de suficiencia en filas con respecto a  $K$  si y sólo si para cada  $p \in \mathbb{R}^m$  y para cada cambio en las columnas  $\{\bar{M}, \bar{N}\}$  de  $\{M, N\}$ , cada vector de KKT del programa bilineal  $BLP(\bar{M}, \bar{N}, K + p)$

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && x^T y \\ & \text{sujeto a:} && x \geq 0 \\ & && y \geq 0 \\ & && \bar{M}x - \bar{N}y \in K + p \end{aligned}$$

es solución del  $ELCP(\bar{M}, \bar{N}, K + p)$ .

Demostración.-

" $\Rightarrow$ " Supongamos que  $\{M, N\}$  tiene la E-propiedad de suficiencia en filas, como esta propiedad se conserva si cambiamos  $\{M, N\}$  por alguno de sus cambios en columnas y  $K$  se cambia por  $K + p$ , probamos esta implicación sólo para  $ELCP(M, N, K)$ .

Sea  $(x, y)$  un vector de KKT del problema  $BLP(M, N, K)$

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && x^T y \\ & \text{sujeto a:} && x \geq 0 \\ & && y \geq 0 \end{aligned}$$

$$Mx - Ny \in K \Leftrightarrow LMx - LNy - b \geq 0$$

entonces existen vectores  $r, s, y \lambda$  tales que:

$$y - r - (LM)^T \lambda = y - r - M^T L^T \lambda = 0 \Rightarrow y = r + M^T L^T \lambda$$

$$x - s + (LN)^T \lambda = x - s + N^T L^T \lambda = 0 \Rightarrow x = s - N^T L^T \lambda$$

$$x \geq 0, r \geq 0, x^T r = 0$$

$$y \geq 0, s \geq 0, y^T s = 0$$

$$LMx - LNy - b \geq 0, \lambda \geq 0, (LMx - LNy - b)^T \lambda = 0$$

Usando estas propiedades tenemos:

$(M^T L^T \lambda) * (N^T L^T \lambda) = (y - r) * (s - x) \leq 0$ , pero como  $L^T \lambda \in (0^+ K)^*$ , usando la hipótesis concluimos que:  $(M^T L^T \lambda) * (N^T L^T \lambda) = 0$  y como consecuencia que  $x * y = 0$  y por tanto que el par  $(x, y)$  es solución del  $ELCP(M, N, K)$ .

“ $\Leftarrow$ ” Supongamos que no se verifica la E-propiedad de suficiencia en filas, por tanto existe un vector  $u \in \mathbb{R}^m$  tal que:

$$\text{Si } [(M^T u)^* (N^T u) \leq 0, u \in (0^+ K)^*] \Rightarrow (M^T u)^* (N^T u) \neq 0$$

entonces para algún  $i$   $(M^T u)_i (N^T u)_i < 0$ . Podemos suponer que  $(M^T u)_i > 0$  y  $(N^T u)_i < 0$ ; en otro caso intercambiamos las columnas de  $\{M, N\}$  y trabajamos con un cambio en columnas de  $\{M, N\}$ . Definimos vectores no negativos:  $x^* := (N^T u)^-$ ,  $s^* := (N^T u)^+$ ,  $y^* := (M^T u)^+$ ,  $r^* := (M^T u)^-$ ; se verifica:  $x^* = -N^T u + s^*$ ,  $y^* = M^T u + r^*$ ,  $(x^*)^T r^* = 0$ ,  $(y^*)^T s^* = 0$ .

Vamos a probar que para un vector  $p^*$  apropiado el par  $(x^*, y^*)$  es un vector de KKT para el programa bilineal  $\text{BLP}(M, N, K + p^*)$

$$\min x^T y$$

$$\text{sueto a: } x \geq 0,$$

$$y \geq 0,$$

$$Mx - Ny \in K + p^* (\Leftrightarrow LMx - LNy \geq b + L p^*)$$

y no es solución del  $\text{ELCP}(M, N, K + p^*)$ . Con este fin sea  $c := L(M x^* - N y^*) - b$ . Se verifica que el conjunto  $\{p \in \mathbb{R}^m / Lp \leq c\}$  es igual a  $(M x^* - N y^*) - K$  y es no vacío ( $p^*$  es de dicho conjunto). Como  $u \in (0^+ K)^*$ , el conjunto  $\{\lambda \in \mathbb{R}^n / L^T \lambda = u, \lambda \geq 0\}$  es no vacío. Por la dualidad de la programación lineal, los problemas

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar } \lambda^T c & \text{maximizar } p^T u \\ \text{sueto a: } L^T \lambda = u & \text{y sueto a: } Lp \leq c \\ & \lambda \geq 0 \end{array}$$

tienen soluciones óptimas  $\lambda^*$  y  $p^*$  tales que  $(\lambda^*)^T c = (p^*)^T u$ .

La desigualdad  $Lp^* \leq c$  demuestra que el par  $(x^*, y^*)$  es una solución factible para el programa  $\text{BLP}(M, N, K + p^*)$ . Como  $(\lambda^*)^T (LMx^* - LNy^* - b - L p^*) = (\lambda^*)^T (c - Lp^*) = (\lambda^*)^T c - (p^*)^T u = 0$ , vemos que el par  $(x^*, y^*)$  es un vector de KKT del programa  $\text{BLP}(M, N, K + p^*)$  con multiplicadores  $r^*$ ,  $s^*$ ,  $\lambda^*$ , sin embargo no es una solución del  $\text{ELCP}(M, N, K + p^*)$  debido a que  $(x^*)^T y^* \neq 0$  pues habíamos supuesto que para algún  $i$   $(M^T u)_i > 0$  y  $(N^T u)_i < 0$ , luego  $x^*_i = (N^T u)_i > 0$ ,  $y^*_i = (M^T u)_i > 0$ .

**3.11 Observación.-** En la prueba de la implicación “ $\Leftarrow$ ” del teorema anterior, se usó un cambio en columnas de  $\{M, N\}$  para hacer  $(M^T u)_i > 0$  y  $(N^T u)_i < 0$ . Se puede evitar este cambio si  $(0^+ K)^*$  es un subespacio: podemos simplificar el trabajo con  $-u$  en lugar de  $u$ . Como se verifica que  $(0^+ K)^*$  es un subespacio si y sólo si  $0^+ K$  es un subespacio, podemos enunciar el siguiente:

**3.12 Teorema.-** Supongamos que  $0^+ K$  es un

subespacio de  $\mathbb{R}^m$ . Entonces  $\{M, N\}$  posee la E-propiedad de suficiencia en filas con respecto a  $K$  si y sólo si para cada  $p^* \in \mathbb{R}^m$ , cada vector de KKT del programa bilineal  $\text{BLP}(M, N, K + p^*)$  es una solución del  $\text{ELCP}(M, N, K + p^*)$ .

**3.13 Definición.-** Decimos que el  $\text{ELCP}(M, N, K)$  es factible si el conjunto de soluciones factibles del  $\text{BLP}(M, N, K)$  es no vacío, es decir el conjunto [también llamado región factible del  $\text{ELCP}(M, N, K)$ ]  $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{2n} / Mx - Ny \in K\}$  es no vacío.

**3.14 Corolario.-** Supongamos que  $\{M, N\}$  tiene la E-propiedad de suficiencia en filas con respecto a  $K$ . Entonces para cada  $p$ , la factibilidad del  $\text{ELCP}(M, N, K + p)$  implica su solucionabilidad (es decir que el conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{2n} / Mx - Ny \in K + p, x^T y = 0\}$  sea no vacío).

Demostración.-

Como el  $\text{ELCP}(M, N, K + p)$  es factible, por definición el  $\text{BLP}(M, N, K + p)$  lo es, luego ha de tener una solución óptima que debe ser de complementariedad ya que como  $\{M, N\}$  tiene la E-propiedad de suficiencia en filas con respecto a  $K$ , sabemos por el teorema 3.10 que cada vector de KKT del  $\text{BLP}(\bar{M}, \bar{N}, K + p)$  (con  $\bar{M} = M, \bar{N} = N$ ) resuelve el  $\text{ELCP}(M, N, K + p)$ , como consecuencia se verifica la solucionabilidad del  $\text{ELCP}(M, N, K + p)$ .

**3.15 Definición.-** Dadas matrices  $M, N \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y dado  $K$  un conjunto poliédrico de  $\mathbb{R}^m$  decimos que  $\{M, N\}$  tiene la P-propiedad con respecto a  $K$  si se verifican las siguientes condiciones:

$$(P_1) \text{ Si } [Mu - Nv \in K - K, u * v \leq 0] \Rightarrow (u, v) = (0, 0)$$

$$(P_2) \text{ Si } [(M^T u)^* (N^T u) \leq 0, u \in (0^+ K)^*] \Rightarrow u = 0$$

**3.16 Observación.-** En el contexto de  $\text{LCP}(M, q)$ ,  $M$  tiene la P-propiedad si  $x * Mx \leq 0 \Rightarrow x = 0$  (es decir  $M$  es una P-matriz).

**3.17 Teorema.-** El par  $\{M, N\}$  tiene la P-propiedad con respecto a  $K$  si y sólo si para cada  $p \in \mathbb{R}^m$  y para cada cambio en columnas  $\{\bar{M}, \bar{N}\}$  de  $\{M, N\}$ , el  $\text{ELCP}(\bar{M}, \bar{N}, K + p)$  tiene solución única.

Demostración.-

“ $\Rightarrow$ ” Supongamos que se verifican las condiciones  $(P_1)$

y  $(P_2)$ . Como éstas se siguen verificando cuando  $K$  se reemplaza por  $K+p$ , y cuando  $(M, N)$  se reemplaza por cualquier cambio en las columnas  $\{\bar{M}, \bar{N}\}$  de  $\{M, N\}$ , probaremos la existencia y unicidad de solución para el  $ELCP(M, N, K)$ . Si  $(x^*, y^*)$  y  $(\bar{x}, \bar{y})$  son dos soluciones cualesquiera de este problema, entonces  $(u, v) = (x^* - \bar{x}, y^* - \bar{y}) \in K - K$  y  $u * v \leq 0$ , por tanto por verificarse la condición  $(P_1)$ ,  $(u, v) = (0, 0)$ . Esto prueba la unicidad de la solución. Probamos ahora la existencia de solución. Como la condición  $(P_2)$  implica la E-propiedad de suficiencia en filas de  $\{M, N\}$  con respecto a  $K$ , usando el corolario 3.14 solamente tenemos que probar la factibilidad del  $ELCP(M, N, K)$ . Supongamos que el  $ELCP(M, N, K)$  no es factible, por tanto los conjuntos cerrados y convexos  $K$  y  $M(\mathbb{R}_+^n) - N(\mathbb{R}_+^n)$  son disjuntos. Por un teorema de separación [6] existe un vector no cero  $d \in \mathbb{R}^m$  tal que:

$$d^T r \geq 0 \geq d^T (Ms - Nt), \text{ para todo } r \in K, s, t \in \mathbb{R}_+^n.$$

Denotamos por  $\text{ext}(K)$  el conjunto (finito) de todos los puntos extremos de  $K$ . Como  $K = \text{conv}(\text{ext}(K)) + 0^+K$  (donde 'conv' se refiere a la envolvente convexa), vemos que:  $0 \neq d \in (0^+K)^*$ ,  $M^T d \leq 0$ ,  $N^T d \geq 0$ , lo cual contradice  $(P_2)$ .

“ $\Leftarrow$ ” Si  $(P_1)$  falla, entonces hay un par no cero  $(u, v)$  tal que  $Mu - Nv = a - b$ ,  $u * v \leq 0$  donde  $a$  y  $b$  pertenecen a  $K$ . Con  $p = Mu^+ - Nv^+ - a = Mu^- - Nv^- - b$ , vemos que  $(u^+, v^+)$  y  $(u^-, v^-)$  son dos soluciones distintas, lo cual contradice la unicidad de solución del  $ELCP(M, N, K+p)$ , por tanto se cumple  $(P_1)$ . Ahora supongamos que no se verifica  $(P_2)$ . Entonces existe un vector no cero  $u \in (0^+K)^*$  tal que:  $(M^T u) * (N^T u) \leq 0$ . Por un cambio en columnas  $\{\bar{M}, \bar{N}\}$  de  $\{M, N\}$  podemos suponer que  $\bar{M}^T u \leq 0$  y  $\bar{N}^T u \geq 0$ . Entonces tenemos:  $0 \geq u^T (\bar{M}x - \bar{N}y)$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ . Ahora podemos encontrar un vector  $p$  tal que  $u^T(e + p) > 0$  para todo  $e \in \text{ext}(K)$ . Como  $K = \text{conv}(\text{ext}(K)) + 0^+K$  y  $u \in (0^+K)^*$ , vemos que  $u^T(k + p) > 0$  para todo  $k \in K$ . Pero esto significa que para  $x$  e  $y$  no negativos en  $\mathbb{R}_+^n$ ,  $\bar{M}x - \bar{N}y$  no puede estar en  $K+p$ . Esto contradice la hipótesis de que el  $ELCP(\bar{M}, \bar{N}, K+p)$  tiene una (única) solución. Por tanto se cumple la condición  $(P_2)$ .

**3.18 Teorema.-** Sean  $M, N \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $K = \{u \in \mathbb{R}^m / Lu = b\}$  donde  $L \in \mathbb{R}^{k \times m}$  tiene (sin pérdida de generalidad) rango  $k$ , y  $b \in \mathbb{R}^k$ . Entonces son equivalentes:

- i)  $\{M, N\}$  tiene la P-propiedad con respecto a  $K$ .
- ii) Para cada  $p \in \mathbb{R}^m$ ,  $ELCP(M, N, K+p)$  tiene solución única.
- iii)  $LM$  y  $LN$  son cuadradas y  $(LM)^{-1}(LN)$  es una P-matriz.

Demostración.-

Vemos que  $K-K = 0^+K = \{u / Lu = 0\}$  y  $(0^+K)^* = \text{Im}(L^T)$ . Entonces las condiciones  $(P_1)$  y  $(P_2)$  se convierten en:

$$(P_1') \quad \text{Si } [LMu - LNv = 0, u * v \leq 0] \Rightarrow (u, v) = (0, 0)$$

$$(P_2') \quad \text{Si } [(M^T L^T x) * (N^T L^T x) \leq 0, x \in \mathbb{R}^k] \Rightarrow x = 0$$

La implicación **i)  $\Rightarrow$  ii)** se sigue del teorema anterior. Cuando se verifica **iii)**,  $(P_1')$  y  $(P_2')$  se verifican ya que una matriz cuadrada es una P-matriz si y sólo si su traspuesta es una P-matriz. Luego hemos probado **iii)  $\Rightarrow$  i)**. Solamente nos falta probar que **ii)  $\Rightarrow$  iii)**. Para simplificar, usaremos la siguiente notación  $A = LM$ ,  $B = LN$ . Entonces las condiciones  $(P_1')$  y  $(P_2')$  se convierten en:

$$(P_1'') \quad \text{Si } [Au - Bv = 0, u * v \leq 0] \Rightarrow (u, v) = (0, 0)$$

$$(P_2'') \quad \text{Si } [(A^T x) * (B^T x) \leq 0, x \in \mathbb{R}^k] \Rightarrow x = 0$$

Se puede probar **ii)  $\Rightarrow$  iii)** basándonos en que  $ELCP(M, N, K+p)$  es equivalente al problema de complementariedad lineal horizontal  $HLCP(A, B, -b-Lp)$  donde  $-b-Lp \in \mathbb{R}^k$ , entonces el teorema está probado si demostramos que **ii')  $\Rightarrow$  iii')** donde:

**ii')** Para cada  $q \in \mathbb{R}^k$ ,  $HLCP(A, B, q)$  tiene solución única.

**iii')**  $A$  y  $B$  son cuadradas y  $A^{-1}B$  es una P-matriz.

Supongamos que se verifica **ii')**, usando el teorema 3.17 también se verifica  $(P_1'')$ . Está claro que la condición  $(P_1'')$  implica que  $A$  y  $B$  (como transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^k$ ) son inyectivas. Entonces  $n \leq k$ . Supongamos que fuese posible que  $n < k$ . Sin pérdida de generalidad, podemos escribir:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \text{ donde } A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ y es inversible.}$$

Entonces podemos escribir el  $HLCP(A, B, q)$  así: encontrar dos vectores  $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ , tales que:

$$\begin{aligned} B_1 y - A_1 x &= q_1 \\ B_2 y - A_2 x &= q_2 \\ x^T y &= 0 \end{aligned}$$

donde  $q$  está descompuesto con componentes  $q_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $q_2 \in \mathbb{R}^{k-n}$ . Por hipótesis, el problema anterior tiene una única solución para todos  $q_1$  y  $q_2$ . Esto significa que para cada  $c \in \mathbb{R}^n$  y  $d \in \mathbb{R}^{k-n}$ , la intersección de los conjuntos  $E_c := \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{2n} / x^T y = 0, x = (A_1)^{-1} B_1 y + c\}$  y  $F_d := \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{2n} / B_2 y - A_2 x = d\}$  es siempre un conjunto unitario. Esto significa, en particular, que los conjuntos  $E_c$  y  $F_d$  son no vacíos. Ahora podemos seleccionar un  $c$  apropiado y entonces  $E_c$  es finito (ya que por [1] sabemos que la solución de un LCP(M,c) para un  $c$  no degenerado es finita). Como la matriz  $[A_2 \ -B_2]$  es no cero, el espacio nulo de este matriz, denominado  $F_0$ , es un subespacio propio de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Como  $F_d$  es una traslación de  $F_0$ , tomando un  $d$  apropiado, podemos hacer que los conjuntos  $E_c$  y  $F_d$  sean disjuntos. Esta contradicción proviene de suponer que  $n$  es menor que  $k$ . Por tanto  $n=k$ , es decir  $A$  y  $B$  son cuadradas. Como  $A$  es ahora no singular, la condición (P1'') es equivalente a decir que  $A^{-1}B$  es una  $P$ -matriz. Entonces se cumple iii') por lo que hemos finalizado la demostración.

#### 4. Problema de control óptimo de semáforos

##### El ejemplo

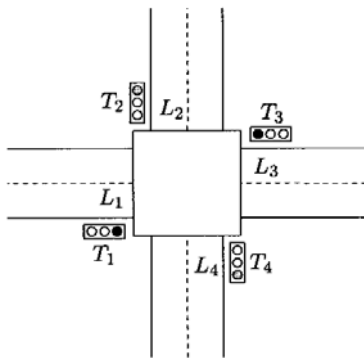


Figura 1

Consideramos un cruce de dos carreteras con los dos sentidos de circulación. Hay cuatro carriles  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  y  $L_4$  y en cada esquina del cruce hay un semáforo ( $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  y  $T_4$ ), (Ver figura 1). Para cada semáforo hay tres fases consecutivas: verde, ámbar y roja; por tanto, cada fase corresponde a un color de luz. La **tasa de llegada** de coches en el carril  $L_i$  en el tiempo  $t$  es  $\lambda_i(t)$  para  $i=1,2,3,4$ . Cuando el semáforo está verde

(respectivamente ámbar) **la tasa de salida** en el carril  $L_i$  en el tiempo  $t$  es  $\mu_i(t)$  (respectivamente  $\kappa_i(t)$ ) para  $i=1,2,3,4$ . Suponemos que la luz ámbar permanece encendida durante un espacio de tiempo fijo e igual a  $\delta_{amb}$  (este tiempo se determina según normas establecidas, en general fluctúa entre los 3 y los 4 segundos). La luz verde permanece encendida durante un espacio de tiempo variable, que se calcula según: la velocidad admitida en las vías, el número de carriles, la afluencia de vehículos, etc.; fluctúa entre los 20 y los 30 segundos. Consideramos que la luz roja de un semáforo está encendida durante un espacio de tiempo igual a la suma de los tiempos en que están encendidas las luces verde y ámbar de los semáforos situados en las vías opuestas. (Ver tabla 1).

Sea un intervalo de tiempo  $[t_0, t_N]$  y un número  $N$  de cambios de señales previstos. Sean  $t_0, t_2, t_4, \dots$  los instantes de tiempo en los que los semáforos  $T_1$  y  $T_3$  cambian de ámbar a rojo (y  $T_2$  y  $T_4$  cambian de rojo a verde). Sean  $t_1, t_3, t_5, \dots$  los instantes de tiempo en los cuales los semáforos  $T_1$  y  $T_3$  cambian de rojo a verde (y  $T_2$  y  $T_4$  cambian de ámbar a rojo). En la siguiente tabla mostramos el esquema de cambios (switching) en los semáforos.

Período	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$
$[t_0, t_1 - \delta_{amb})$	rojo	verde	rojo	verde
$[t_1 - \delta_{amb}, t_1)$	rojo	ámbar	rojo	ámbar
$[t_1, t_2 - \delta_{amb})$	verde	rojo	verde	rojo
$[t_2 - \delta_{amb}, t_2)$	ámbar	rojo	ámbar	rojo
$[t_2, t_3 - \delta_{amb})$	rojo	verde	rojo	verde
$[t_3 - \delta_{amb}, t_3)$	rojo	ámbar	rojo	ámbar
.....	.....	.....	.....	.....

Tabla 1

Para modelizar estas situaciones consideramos:  $G_1 = G_3 = \{1,3, \dots\}$  y  $G_2 = G_4 = \{0,2, \dots\}$ . Así si  $k \in G_i$  entonces el semáforo  $T_i$  cambia de rojo a verde en el instante  $t_k$  y está verde en el período  $(t_k, t_{k+1} - \delta_{amb})$ . Definimos  $\delta_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $k=0,1,2, \dots, N-1$ . Es obvio que tenemos  $0 \leq \delta_{amb} \leq \delta_k$  para todo  $k$ . Además  $\lambda_i(t)$ ,  $\mu_i(t)$ ,  $\kappa_i(t) \geq 0$  para todos  $i, t$  y  $t_k < t_{k+1}$  para todo  $k$ . Sea  $l_i(t)$  la **longitud de la cola** (es decir el número de coches esperando) en el carril  $L_i$  en el instante de tiempo  $t$ .

Claramente  $l_i(t) \geq 0$  para todos  $i, t$ .

### El modelo exacto

Consideremos el carril  $L_1$ . Cuando el semáforo  $T_1$  está rojo, hay llegadas al carril  $L_1$  (caracterizadas por la función tasa de llegada  $\lambda_1(t)$ ) y no hay salidas. Cuando el semáforo  $T_1$  está verde (o ámbar), hay llegadas y salidas en el carril  $L_1$ . En ese caso la tasa neta de crecimiento de la cola en el tiempo  $t$  es  $\lambda_1(t) - \mu_1(t)$ , (respectivamente  $\lambda_1(t) - \kappa_1(t)$ ). Además, la evolución de la longitud de cola en el carril  $L_1$  está dada por:

$$\frac{dl_1(t)}{dt} = \begin{cases} \lambda_1(t) & \text{si } t \in (t_{2k}, t_{2k+1}) \\ \lambda_1(t) - \mu_1(t) & \text{si } t \in (t_{2k+1}, t_{2k+2} - \delta_{amb}) \\ \lambda_1(t) - \kappa_1(t) & \text{si } t \in (t_{2k+2} - \delta_{amb}, t_{2k+2}) \end{cases} \quad (2)$$

para  $k=0,1,2,\dots$ . Esto implica que la relación entre las longitudes de las colas y los instantes de tiempo switching viene dada por:

$$l_1(t_{2k+1}) = l_1(t_{2k}) + \int_{t_{2k}}^{t_{2k+1}} \lambda_1(t) dt \quad (3)$$

$$l_1(t_{2k+2}) = l_1(t_{2k+1}) + \int_{t_{2k+1}}^{t_{2k+2} - \delta_{amb}} (\lambda_1(t) - \mu_1(t)) dt + \int_{t_{2k+2} - \delta_{amb}}^{t_{2k+2}} (\lambda_1(t) - \kappa_1(t)) dt \quad (4)$$

para  $k=0,1,2,\dots$ . Podemos escribir ecuaciones análogas para la evolución de las longitudes de cola en los otros carriles.

### Un modelo simplificado

El modelo descrito arriba no es manejable para el análisis matemático, por tanto introducimos ahora algunas hipótesis con las que obtenemos un modelo (aproximado) más simple que se puede analizar muy fácilmente y para el cual podemos calcular una sucesión temporal switching óptima para los semáforos.

Desde ahora introducimos las siguientes hipótesis:

- Las longitudes de las colas son variables continuas.
- La tasa media de llegadas y salidas de coches es constante (o varía muy despacio en el tiempo).
- Para cada carril la tasa media de salidas durante la fase verde es mayor o igual que la tasa media de salidas durante la fase ámbar.

Sea  $\bar{\lambda}_i$  la tasa media de llegada de vehículos en el carril  $L_i$  (dada en vehículos por segundo). Sea  $\bar{\mu}_i$  (respectivamente  $\bar{\kappa}_i$ ) la tasa media de salida en el carril  $L_i$  cuando el semáforo está verde (respectivamente ámbar) y la longitud de cola es mayor que 0 (es decir, cuando hay coches esperando o llegando al carril  $L_i$ ). Así a partir de ahora suponemos que:

$$\lambda_i(t) = \bar{\lambda}_i \text{ para todo } t,$$

$$\mu_i(t) = \begin{cases} \bar{\mu}_i & \text{si } t \in \bigcup_{k \in G_i} (t_k, t_{k+1} - \delta_{amb}) \text{ y } l_i(t) > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\kappa_i(t) = \begin{cases} \bar{\kappa}_i & \text{si } t \in \bigcup_{k \in G_i} (t_{k+1} - \delta_{amb}, t_{k+1}) \text{ y } l_i(t) > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Nótese que  $\bar{\lambda}_i$ ,  $\bar{\mu}_i$  y  $\bar{\kappa}_i$  son constantes (posiblemente sobre un período limitado de tiempo). Además  $\bar{\lambda}_i \geq 0$ ,  $\bar{\mu}_i \geq 0$ ,  $\bar{\kappa}_i \geq 0$  y  $\bar{\kappa}_i \leq \bar{\mu}_i$ .

Hemos de tener en cuenta que si consideramos (2) y (3)-(4), entonces la longitud de cola nunca es negativa. Sin embargo, si usamos las tasas medias de llegada y de salida en la descripción de la evolución de las longitudes de cola, entonces hemos de incluir explícitamente la condición de no negatividad cuando escribamos más adelante las ecuaciones (aproximadas) de evolución de las longitudes de cola. Como consecuencia tenemos:

$$l_1(t_{2k+1}) = l_1(t_{2k}) + \bar{\lambda}_1 \delta_{2k}$$

$$l_1(t_{2k+2} - \delta_{amb}) = \max(l_1(t_{2k+1}) + (\bar{\lambda}_1 - \bar{\mu}_1)(\delta_{2k+1} - \delta_{amb}), 0) \quad (5)$$

$$l_1(t_{2k+2}) = \max(l_1(t_{2k+2} - \delta_{amb}) + (\bar{\lambda}_1 - \bar{\kappa}_1)\delta_{amb}, 0) = \max(l_1(t_{2k+1}) + (\bar{\lambda}_1 - \bar{\mu}_1)\delta_{2k+1} + (\bar{\mu}_1 - \bar{\kappa}_1)\delta_{amb}, (\bar{\lambda}_1 - \bar{\kappa}_1)\delta_{amb}, 0) \quad (6)$$

para  $k=0,1,2,\dots$ . Tengamos en cuenta que también

$l_1(t_{2k+1}) = \max(l_1(t_{2k}) + \bar{\lambda}_1 \delta_{2k}, 0)$  para  $k=0,1,2,\dots$ , además  $l_i(t) \geq 0, \forall t$ . Podemos escribir ecuaciones similares para  $l_2(t_k)$ ,  $l_3(t_k)$  y  $l_4(t_k)$ . Si definimos

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} l_1(t_k) \\ l_2(t_k) \\ l_3(t_k) \\ l_4(t_k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 - \bar{\mu}_2 \\ \bar{\lambda}_3 \\ \bar{\lambda}_4 - \bar{\mu}_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 - \bar{\mu}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \\ \bar{\lambda}_3 - \bar{\mu}_3 \\ \bar{\lambda}_4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ (\bar{\mu}_2 - \bar{\kappa}_2)\delta_{amb} \\ 0 \\ (\bar{\mu}_4 - \bar{\kappa}_4)\delta_{amb} \end{bmatrix}, \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} (\bar{\mu}_1 - \bar{\kappa}_1)\delta_{amb} \\ 0 \\ (\bar{\mu}_3 - \bar{\kappa}_3)\delta_{amb} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ \max((\bar{\lambda}_2 - \bar{\kappa}_2)\delta_{amb}, 0) \\ 0 \\ \max((\bar{\lambda}_4 - \bar{\kappa}_4)\delta_{amb}, 0) \end{bmatrix}, \mathbf{b}_6 = \begin{bmatrix} \max((\bar{\lambda}_1 - \bar{\kappa}_1)\delta_{amb}, 0) \\ 0 \\ \max((\bar{\lambda}_3 - \bar{\kappa}_3)\delta_{amb}, 0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos:

$$\mathbf{x}_{2k+1} = \max(\mathbf{x}_{2k} + \mathbf{b}_1\delta_{2k} + \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_5) \quad (7)$$

$$\mathbf{x}_{2k+2} = \max(\mathbf{x}_{2k+1} + \mathbf{b}_2\delta_{2k+1} + \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_6) \quad (8)$$

para  $k=0,1,2,\dots$

**Definición 4.1** Decimos que las sucesiones  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=0,1,\dots,N}$  y  $\{\delta_k\}_{k=0,\dots,N-1}$  son compatibles (para  $\delta_{amb}$ ,  $\bar{\lambda}_i$ 's,  $\bar{\mu}_i$ 's y  $\bar{\kappa}_i$ 's dados) si satisfacen las ecuaciones de recurrencia (7)-(8) para todo  $k$ .

**Nota.** El modelo expuesto [7] es diferente de los modelos usados por la mayoría de los investigadores debido a que consideramos que las longitudes de los ciclos verde-ámbar-rojo pueden variar de ciclo a ciclo, es decir hemos obtenido un **modelo acíclico**. Además consideramos intersecciones no saturadas, es decir, aceptamos que las longitudes de cola puedan ser iguales a 0 durante la fase verde.

### Control óptimo. Exposición del problema.

Desde ahora suponemos que conocemos las tasas de llegada y de salida. Para un entero  $N$  dado, y un tiempo inicial  $t_0$ , queremos calcular una sucesión óptima  $t_1, t_2, \dots, t_N$  de tiempos switching que minimice un criterio dado  $J$ . Definimos  $G_i(N) = G_i \cap \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ . Las posibles funciones objetivo son:

- Longitud media de la cola sobre todas las colas

$$J_1 = \sum_{i=1}^4 w_i \frac{\int_{t_0}^{t_N} I_i(t) dt}{t_N - t_0} \quad (9)$$

- Longitud media de la cola sobre la peor cola

$$J_2 = \max_i \left( w_i \frac{\int_{t_0}^{t_N} I_i(t) dt}{t_N - t_0} \right) \quad (10)$$

- Longitud de cola en el peor caso

$$J_3 = \max_{i,t} (w_i I_i(t)) \quad (11)$$

- Tiempo de espera medio sobre todas las colas

(El tiempo de espera medio es igual a la longitud media de cola dividida por la tasa media de llegada).

$$J_4 = \sum_{i=1}^4 w_i \frac{\int_{t_0}^{t_N} I_i(t) dt}{\lambda_i(t_N - t_0)} \quad (12)$$

- Tiempo de espera medio sobre la peor cola

$$J_5 = \max_i \left( w_i \frac{\int_{t_0}^{t_N} I_i(t) dt}{\lambda_i(t_N - t_0)} \right) \quad (13)$$

donde  $w_i > 0$  para todo  $i$ . Los factores peso  $w_i$  se pueden usar para dar una importancia más alta o peso a algunos carriles, por ejemplo escogemos  $w_1 = w_3 = 2$  y  $w_2 = w_4 = 1$  para dar una importancia 100% más alta a los coches que circulan sobre la calle formada por los carriles  $L_1$  y  $L_3$ .

Podemos imponer algunas condiciones extras, tales como las duraciones mínimas y máximas para los tiempos verde y rojo o longitudes máximas para las colas, (esto podría corresponder a una cota superior del espacio disponible debido a la distancia con la incorporación precedente o por las características del cruce). Esto nos lleva al problema  $\mathcal{P}$  siguiente:

$$\text{Minimizar } J \quad (14)$$

sujeto a:

$$\delta_{\min, \text{verde}, 1} \leq \delta_{2k+1} - \delta_{amb} \leq \delta_{\max, \text{verde}, 1} \quad \text{para } k=0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - 1 \quad (15)$$

$$\delta_{\min, \text{verde}, 2} \leq \delta_{2k} - \delta_{amb} \leq \delta_{\max, \text{verde}, 2} \quad \text{para } k=0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor \quad (16)$$

$$\mathbf{x}_k \leq \mathbf{x}_{\max} \quad \text{para } k=1, 2, \dots, N \quad (17)$$

$$\mathbf{x}_{2k+1} = \max(\mathbf{x}_{2k} + \mathbf{b}_1\delta_{2k} + \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_5) \quad \text{para } k=0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor \quad (18)$$

$$\mathbf{x}_{2k+2} = \max(\mathbf{x}_{2k+1} + \mathbf{b}_2\delta_{2k+1} + \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_6) \quad \text{para } k=0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - 1 \quad (19)$$

donde  $\delta_{\min, \text{verde}, i}$  (respectivamente  $\delta_{\max, \text{verde}, i}$ ) es el mínimo (respectivamente el máximo) tiempo verde en el carril  $L_i$ , y  $(\mathbf{x}_{\max})_i$  es la máxima longitud de cola en el

carril  $L_i$ . Nótese que también podríamos considerar que  $\delta_{\min, \text{verde}, i}$ ,  $\delta_{\max, \text{verde}, i}$  y  $\mathbf{x}_{\max}$  dependen de  $k$ . En todo lo que sigue suponemos que  $\mathbf{x}_0 \leq \mathbf{x}_{\max}$ .

### Métodos para resolver el problema $\mathcal{P}$

a) Escribir las restricciones del problema  $\mathcal{P}$  como un ELCP [7], -por tanto para determinar la sucesión temporal switching óptima debemos optimizar la función objetivo  $J$  en la solución del ELCP-; para ello consideramos (18) para un índice arbitrario  $k$ . Esta ecuación se puede reescribir como sigue:

$$\mathbf{x}_{2k+1} \geq \mathbf{x}_{2k} + \mathbf{b}_1 \delta_{2k} + \mathbf{b}_3 \quad (20)$$

$$\mathbf{x}_{2k+1} \geq \mathbf{b}_5 \quad (21)$$

$$(\mathbf{x}_{2k+1})_i = (\mathbf{x}_{2k} + \mathbf{b}_1 \delta_{2k} + \mathbf{b}_3)_i \text{ o } (\mathbf{x}_{2k+1})_i = (\mathbf{b}_5)_i \text{ para } i=1,2,3,4 \quad (22)$$

o equivalentemente:

$$\mathbf{x}_{2k+1} - \mathbf{x}_{2k} - \mathbf{b}_1 \delta_{2k} - \mathbf{b}_3 \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}_{2k+1} - \mathbf{b}_5 \geq \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{x}_{2k+1} - \mathbf{x}_{2k} - \mathbf{b}_1 \delta_{2k} - \mathbf{b}_3)_i (\mathbf{x}_{2k+1} - \mathbf{b}_5)_i = 0 \text{ para } i=1,2,3,4$$

Como una suma de números no negativos es igual a 0 si y sólo si todos los números son iguales a 0, este sistema de ecuaciones es equivalente a:

$$\mathbf{x}_{2k+1} - \mathbf{x}_{2k} - \mathbf{b}_1 \delta_{2k} - \mathbf{b}_3 \geq \mathbf{0} \quad (23)$$

$$\mathbf{x}_{2k+1} - \mathbf{b}_5 \geq \mathbf{0} \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^4 (\mathbf{x}_{2k+1} - \mathbf{x}_{2k} - \mathbf{b}_1 \delta_{2k} - \mathbf{b}_3)_i (\mathbf{x}_{2k+1} - \mathbf{b}_5)_i = 0 \quad (25)$$

Podemos repetir este razonamiento para (19) y para cada  $k$ . Así si definimos:

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \text{ y } \delta^* = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{N-1} \end{bmatrix}$$

obtenemos el problema  $\mathcal{P}$  en la siguiente forma:

$$\text{minimizar } J \quad (26)$$

sujeto a:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{B}\delta^* + \mathbf{c} \geq \mathbf{0} \quad (27)$$

$$\mathbf{x}^* + \mathbf{d} \geq \mathbf{0} \quad (28)$$

$$\mathbf{E}\mathbf{x}^* + \mathbf{F}\delta^* + \mathbf{g} \geq \mathbf{0} \quad (29)$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{B}\delta^* + \mathbf{c})^T (\mathbf{x}^* + \mathbf{d}) = 0 \quad (30)$$

cuyas restricciones son un caso especial de ELCP y donde  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{E}$  son matrices cuadradas de orden  $4N$  ( $\mathbf{A}$  es P-matriz);  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{F}$  son matrices de orden  $4N \times N$ ;  $\mathbf{c}, \mathbf{d}$  y  $\mathbf{g}$  son vectores de orden  $4N \times 1$ .

La dificultad de este método es que el problema ELCP es un problema NP-duro, y el algoritmo propuesto en [8] para resolver el ELCP usa tiempos de ejecución exponenciales, y por tanto no es factible si  $N$  es grande.

b) En [9] proponemos un método híbrido de solución consistente en una heurística para fijar los valores de  $\delta^* \in (\mathbb{R}_0^+)^N$  más un algoritmo eficiente para resolver el problema LCP que se obtiene usando la siguiente:

**Propiedad 4.2** Para cada  $\delta^* \in (\mathbb{R}_0^+)^N$ , las restricciones de ELCP (27)–(30) describen un problema de complementariedad lineal con solución única.

Demostración.-

Al considerar el cambio de variable  $\mathbf{x}^* + \mathbf{d} = \mathbf{y}$  se obtiene el problema LCP con matriz  $\mathbf{A}$  y término independiente  $\mathbf{B}\delta^* + \mathbf{c} - \mathbf{A}\mathbf{d}$ . La matriz  $\mathbf{A}$  es triangular inferior con elementos positivos (1) en la diagonal principal, por tanto P-matriz y como consecuencia (usando la observación 3.16 y el Teorema 3.17), el problema LCP tiene solución única, esto quiere decir que dado  $\delta^*$  la longitud de las colas está unívocamente determinada.

### 5. Conclusiones y líneas futuras de investigación.

- Hemos comprobado como las restricciones del modelo usado para representar el problema de regulación del tráfico mediante semáforos en un cruce sencillo verifica las condiciones necesarias y suficientes de existencia y unicidad de solución.
- El cumplimiento de las propiedades expuestas en la sección 3 ha de estar presente cuando (en el paso siguiente) diseñemos un modelo que nos describa situaciones de regulación mediante semáforos de cruces complejos en los que exista en cada sentido de circulación la posibilidad de cambiar de dirección girando a derecha o izquierda, o cuando diseñemos un modelo que describa una situación de colas dependientes, es decir, una situación donde las salidas de algunas colas serán conectadas con

