

Optimización Difusa

Alba Sánchez⁽¹⁾, Ricardo Álvarez⁽²⁾
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación⁽¹⁾
Facultad de Ciencias de la Electrónica⁽²⁾
agalvez@cs.buap.mx, algor@ece.buap.mx

Resumen: En este trabajo se muestra una aplicación de la lógica difusa en la teoría de optimización. Se presentan ejemplos, uno donde sólo los términos son conjuntos difusos y otro donde tanto los coeficientes como los términos de las restricciones son conjuntos difusos.

Palabras clave: Conjunto difuso, alfa cortaduras, número difuso, orden entre números difusos.

1 Introducción

Muchos campos técnicos, incluyendo todos los de la ingeniería, involucran alguna forma de optimización que es requerida en el proceso de diseño. Debido a que el diseño es un problema con muchas soluciones, el reto es encontrar la mejor solución de acuerdo a algún criterio. En realidad, casi cualquier proceso de optimización involucra intercambios entre costos y beneficios, debido que al encontrar soluciones óptimas es análogo a crear diseños que pueden tener muchas soluciones, pero solamente unas pocas podrían ser óptimas, o útiles particularmente cuando existe una relación generalmente no lineal entre rendimiento y costo. La optimización en su forma mas general, involucra encontrar la solución óptima a partir de una familia de soluciones razonables de acuerdo a un criterio.⁽³⁾

El problema clásico de programación lineal es encontrar los valores máximos o mínimos de una función lineal bajo restricciones representadas por ecuaciones o desigualdades. El más típico problema de programación lineal es:

Minimizar (o maximizar)

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

sujeta a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

La función a minimizar (o maximizar) es llamada función objetivo, que es denotado por z . Los números C_i son llamados coeficientes y el vector $c=(c_1, c_2, \dots, c_n)$ es llamado vector de costo. La matriz $A=[a_{ij}]$, $i=1, \dots, n$ y $j=1, \dots, m$ es llamada matriz de restricción, el vector $b=(b_1, \dots, b_m)$ se forma con los términos independientes de las restricciones. Lo cual puede bien simplificarse como:

Minimizar

$$z=cx$$

Sujeta a:

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

donde $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es el vector de las variables.

En muchas situaciones prácticas no es razonable requerir que las restricciones o la función objetivo, sea tan estricto, en tal situación es deseable la programación lineal difusa

El tipo más general de programación lineal difusa es el siguiente :

Maximizar

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{sujeta a: } \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \leq B_i$$

$$x_j \geq 0$$

donde A_{ij}, B_i, C_j son números difusos y x_j son variables cuyos estados son números difusos, la operación de suma y multiplicación son operaciones de conjuntos difusos y el orden que denota \leq es de números difusos.

El caso que presentamos es cuando B_i son números difusos, que típicamente tienen la forma:

$$B_i = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{cuando } x \leq b_i \\ \frac{b_i + p_i - x}{p_i} & \text{cuando } b_i < x < b_i + p_i \\ 0 & \text{cuando } b_i + p_i \leq x \end{array} \right\}$$

Para cada vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, primero calculamos el grado $D_i(x)$, para los cuales x satisface las condiciones dadas por la fórmula

$$D_i(x) = B_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)$$

Estos grados son conjuntos difusos sobre \mathbb{R}^n

Y su intersección $\bigcap_{i=1}^m D_i$ es un conjunto factible difuso.

Ahora determinamos el conjunto difuso de valores óptimos, esto es calculando la cota superior e inferior de los valores óptimos.

La cota inferior z_l es obtenida al resolver el problema de programación lineal:

Maximizar

$$Z = cx$$

sujeta

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$x_j \geq 0$$

y la cota inferior z_l de los valores óptimos, es obtenida de forma similar resolviendo:

Maximizar

$$Z = cx$$

Sujeta a:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + p_i$$

$$x_j \geq 0$$

Así el conjunto de valores óptimos difusos G el cual es un subconjunto difuso de \mathbb{R}^n es definido por:

$$G(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{cuando } z_u \leq cx \\ \frac{cx - z_l}{z_u - z_l} & \text{cuando } z_l \leq cx \leq z_u \\ 0 & \text{cuando } cx \leq z_l \end{array} \right\}$$

El problema se reduce a encontrar la solución de optimización clásica

Maximizar λ

$$\lambda (z_u - z_l) - cx \leq -z_l$$

$$\lambda p_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + p_i$$

$$\lambda, x_j \geq 0$$

esto es, encontrar $x \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$[\bigcap_{i=1}^m D_i \cap G](x)$$

2. Ejemplos

En el primer ejemplo los términos independientes de los B_i son los únicos conjuntos difusos y en el segundo ejemplo, tanto los B_i , como los a_{ij} de las restricciones son conjuntos difusos.

3.1 Primer caso

Maximizar

$$Z = .4x_1 + .3x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 \leq B_1$$

$$2x_1 + x_2 \leq B_2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Donde

$$B_1(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{cuando } x \leq 400 \\ \frac{500 - x}{100} & \text{cuando } 400 < x \leq 500 \\ 0 & \text{cuando } x > 500 \end{array} \right\}$$

y

$$B_2(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{cuando } x \leq 500 \\ 600 - x & \text{cuando } 500 < x \leq 600 \\ 100 & \\ 0 & \text{cuando } x > 600 \end{array} \right\}$$

Resolvamos primero el sistema siguiente para encontrar la cota inferior

Maximizar

$$Z = 4x_1 + 3x_2$$

Sujeto

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 400 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 500 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

lo que resulta $z_l = 130$

Para encontrar la cota superior, resolvamos:

Maximizar

$$Z = 4x_1 + 3x_2$$

Sujeto

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 500 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 600 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lo que da $z_u = 160$

Por último encontremos la solución de:

$$\text{Maximizar } \dots \lambda$$

Sujeta

$$\begin{aligned} 30\lambda - (4x_1 + 3x_2) &\leq -130 \\ 100\lambda + x_1 + x_2 &\leq 500 \\ 100\lambda + 2x_1 + x_2 &\leq 600 \\ x_1, x_2, \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de optimización clásica, obtenemos $x_1 = 100$, $x_2 = 350$

2.2 Caso II

El problema de optimización difusa general puede ser reescrito como

Maximizar

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} \sum (s_{ij}, l_{ij}, r_{ij}) x_{ij} &\leq \pi t_i, u_i, v_i \phi \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

Donde $a_{ij} = \langle s_{ij}, l_{ij}, r_{ij} \rangle$ y $B_i = \langle t_i, u_i, v_i \rangle$ son números difusos. El orden parcial \leq es definido por $A \leq B$ si y solo si $\max(A, B) = B$. Por lo que este sistema puede ser reescrito como:

Maximizar

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n s_{ij} x_j &\leq t_i \\ \sum_{j=1}^n (s_{ij} - l_{ij}) x_j &\leq t_i - u_i \\ \sum_{j=1}^n (s_{ij} + r_{ij}) x_j &\leq t_i + v_i \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

Considere el siguiente problema de optimización lineal

Maximizar

$$Z = 5x_1 + 4x_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} \langle 4, 2, 1 \rangle x_1 + \langle 5, 3, 1 \rangle x_2 &\leq \langle 24, 5, 8 \rangle \\ \langle 4, 1, 2 \rangle x_1 + \langle 1, 5, 1 \rangle x_2 &\leq \langle 12, 6, 3 \rangle \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Reescribimos el sistema como:

Maximizar

$$Z = 5x_1 + 4x_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 &\leq 24 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + 2x_2 &\leq 19 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 6x_2 &\leq 32 \\ 6x_1 + 2x_2 &\leq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este problema, obtenemos $x_1=1.5$, $x_2=3$.

4 Conclusiones

La lógica difusa resulta un recurso importante en la solución de problemas de optimización donde no exista la rugosidad de la lógica clásica, ante la necesidad de resolver cierto problema surgen métodos híbridos que combinen nuevas técnicas y es aquí donde la lógica difusa juega un papel importante.

References:

[1] Mehdi R. - Zargham, Computer Architecture Sails and Parallel Systems, Prentice Hall, P. 381.

[2] Lefteri H. Tsoukalas - Robert E. Uhring, Fuzzy and Neural Approaches in Engineering to Wiley. Interscience Publicati

Engineering, TO Wiley - Interscience Publication 1997, P. 145

[3] Klir J. George, Yuan Bo, Fuzzy sets and fuzzy logic Theory and Applications, Prentice Hall.

[4]

[5] Thimoty J. Ross, Fuzzy Logic with Engineering Applications, McGraw-Hil