

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS Y PRUEBAS DE HIPÓTESIS EN EL MODELO DE  
MEDIAS DE DOS FACTORES Y SU APLICACIÓN EN EL ANÁLISIS DEL TIEMPO DE  
EJECUCIÓN DE ALGORITMOS

**M.C. Agustín Santiago Moreno**

[sagustin8@hotmail.com](mailto:sagustin8@hotmail.com)

**C. Carmelinda García Benítez**

[Karmelinda27@yahoo.com.mx](mailto:Karmelinda27@yahoo.com.mx)

ABSTRACT

El análisis estadístico de experimentos empleando el modelo de medias, es mucho más simple que el modelo clásico, lo cual es evidente en la estimación de parámetros y pruebas de hipótesis. Esta teoría es relativamente nueva (Hocking 1984) y, el desarrollo que se hace de el, es muy general y supone como evidentes cuestiones que requieren, desde nuestro punto de vista, un tratamiento más accesible. Sin renunciar al rigor matemático, ponemos al alcance de los estudiosos de los modelos de diseño de experimentos esta metodología y su aplicación al análisis del tiempo de ejecución de algoritmos en distintos paquetes estadísticos.

Palabras clave: Modelos lineales, modelos de análisis de varianza, modelos de medias, estimación de parámetros, pruebas de hipótesis, evaluación de algoritmos.

## Modelos de medias

Definiremos el *modelo de medias* de dos criterios de clasificación como

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, a \\ j = 1, \dots, b \\ k = 1, \dots, r \end{array}$$

Donde,  $y_{ijk}$  es la  $k$ -ésima respuesta sobre la  $(ij)$ -ésima población con media  $\mu_{ij}$ , y los errores son independientes con distribución normal con media 0 y varianza  $\sigma^2$ , es decir,  $[N(0, \sigma^2)]$ .

La simplicidad de este modelo se deriva del hecho de que  $E(y)$  es un simple escalar,  $\mu$ .

Las  $abr$  observaciones se pueden organizar en una tabla de doble entrada en la cual se tienen  $ab$  celdas con  $r$  réplicas, a partir de la cual es posible construir una tabla de medias de celdas y medias marginales, que dan nombre al referido modelo, como se muestra a continuación:

FactorA	Factor B				
	1	2	...	b	
1	$\mu_{11}$	$\mu_{12}$	...	$\mu_{1b}$	$\bar{\mu}_{1\cdot}$
2	$\mu_{21}$	$\mu_{22}$	...	$\mu_{2b}$	$\bar{\mu}_{2\cdot}$
⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
a	$\mu_{a1}$	$\mu_{a2}$	...	$\mu_{ab}$	$\bar{\mu}_{a\cdot}$
	$\bar{\mu}_{\cdot 1}$	$\bar{\mu}_{\cdot 2}$	...	$\bar{\mu}_{\cdot b}$	$\bar{\mu}_{\cdot \cdot}$

## ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS.

### Estimación de medias de celdas.

Recuerde que el modelo de medias es:

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, a \\ j = 1, \dots, b \\ k = 1, \dots, r \end{array}$$

donde  $y_{ijk} \sim N(\mu, \mathbf{I} \sigma^2)$  y  $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$ .

Es por ello que la función de densidad de la muestra será:

$$f(Y; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_{ijk} - \mu_{ij})^2}$$

y la función de verosimilitud estará dada por:

$$L(\theta; Y) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^r \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_{ijk} - \mu_{ij})^2}$$

O de forma equivalente,

$$L(\theta; Y) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{abr}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \mu_{ij})^2}$$

la log-verosimilitud será  $L^*(\theta; Y) = -\frac{abr}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \mu_{ij})^2$

$$\text{donde, } \ln(L(\theta; Y)) = L^*(\theta; Y)$$

Después de derivar parcialmente y resolver el sistema de ecuaciones normales se obtiene,

$$\hat{\mu}_{ij} = \frac{y_{ij\cdot}}{r} = \bar{y}_{ij\cdot} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \end{matrix}$$

**Estimador de las medias de niveles de tratamiento A.**

$$\hat{\mu}_{i\cdot} = \bar{\mu}_{i\cdot} = \bar{y}_{i\cdot\cdot} \quad , \quad i = 1, \dots, a$$

**Estimador de las medias de niveles de tratamiento B.**

$$\hat{\mu}_{\cdot j} = \bar{\mu}_{\cdot j} = \bar{y}_{\cdot j\cdot} \quad , \quad j = 1, \dots, b$$

**Estimador de la media General.**

$$\hat{\mu}_{\cdot\cdot} = \frac{\bar{y}_{\cdot 1\cdot} + \bar{y}_{\cdot 2\cdot} + \dots + \bar{y}_{\cdot b\cdot}}{b} = \frac{\sum_{j=1}^b \bar{y}_{\cdot j\cdot}}{b} = \bar{y}_{\cdot\cdot}$$

Obteniendo en total  $(a+b+ab+1)$  estimadores para igual número de parámetros.

**Estimador de la varianza.**

Por éste método es posible hallar un estimador para la varianza si derivamos  $L^*(\theta; Y)$  con respecto a  $\sigma^2$  y se obtiene

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \hat{\mu}_{ij})^2}{abr}$$

donde  $\hat{\mu}_{ij}$  es un estimador de la media de ij-ésima celda.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot})^2}{abr}, \text{ o equivalentemente, } \frac{Q(\hat{\mu})}{abr}$$

donde  $Q(\hat{\mu})$  recibe el nombre de suma de cuadrados residual o suma de cuadrados de los errores.

## PRUEBAS DE HIPÓTESIS LINEALES SOBRE LAS MEDIAS DE CELDAS

**Prueba de no interacción y de efectos principales en el modelo de medias.**

En términos de la notación que hemos adoptado para nuestro modelo, las hipótesis nulas pueden reescribirse como:

Hipótesis de no interacción

$$H_0 : \mu_{ij} - \mu_{kj} = \mu_{it} - \mu_{kt} \quad , \quad i, k = 1, \dots, a, j, t = 1, \dots, b \text{ para todo } i, k \neq j, t$$

Hipótesis de igualdad de efectos de tratamiento A

$$H_0 : \bar{\mu}_{i\cdot} = \bar{\mu}_{k\cdot} \quad , \quad i, k = 1, 2, \dots, a \text{ para todo } i \neq k$$

Hipótesis de igualdad de efectos de tratamiento B

$$H_0 : \bar{\mu}_{\cdot j} = \bar{\mu}_{\cdot t} \quad , \quad j, t = 1, 2, \dots, b \text{ para todo } j \neq t$$

Para el caso de las hipótesis sobre los efectos principales, la primera cuestión de interés es probar si hay diferencias entre las respuestas para los diferentes niveles de los factores. Un caso natural consiste en comparar los niveles medios de un factor promedio sobre todos los niveles restantes del mismo factor, separadamente de las conclusiones sobre la hipótesis de no interacción.

Iniciaremos el desarrollo de las pruebas estadísticas sobre nuestras hipótesis, con la que nos parece ligeramente más complicada, la hipótesis de no interacción, y, para ello, consideremos la siguiente tabla de medias de celda y medias marginales:

		Factor B				
		$\mu_{11}$	$\mu_{12}$	$\dots$	$\mu_{1b}$	$\bar{\mu}_{1\bullet}$
		$\mu_{21}$	$\mu_{22}$	$\dots$	$\mu_{2b}$	$\bar{\mu}_{2\bullet}$
		$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
Factor A	$\mu_{a1}$	$\mu_{a2}$	$\dots$	$\mu_{ab}$	$\bar{\mu}_{a\bullet}$	
	$\bar{\mu}_{\bullet 1}$	$\bar{\mu}_{\bullet 2}$		$\bar{\mu}_{\bullet b}$	$\bar{\mu}_{\bullet\bullet}$	

**Prueba de no interacción.**

Consideremos probar la hipótesis

$$H_{AB} : \mu_{ij} - \mu_{kj} = \mu_{it} - \mu_{kt} \quad \begin{matrix} i, k = 1, \dots, a \\ j, t = 1, \dots, b \end{matrix}$$

Esta relación entre las medias es llamada “la restricción de no interacción”, la cual implica que *la diferencia en la media de respuestas para cualquier población considerada, es la misma para cada uno de los diferentes niveles de cada factor.*

La prueba estadística será obtenida a partir de la razón de verosimilitud

$$\gamma = \frac{\text{Max}_{\text{sujeto a } H_0=h} L(\theta, \sigma^2)}{\text{Max} L(\theta, \sigma^2)}$$

Como nuestro desarrollo, con respecto al modelo de medias, es principalmente teórico, emplearemos el método de multiplicadores de Lagrange para la solución del problema de optimización restringida, en el cual la función de Lagrange está definida por

$$F(\theta, \sigma^2, \delta) = \ln(\theta, \sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2} \delta' (H\theta - h)$$

donde  $\delta$  es un vector de  $(a-1)(b-1)$  multiplicadores desconocidos, toda vez que hemos considerado un conjunto redundante de restricciones y, cuando se compare una media con sí misma, esta comparación se anulará.

Para nuestro modelo restringido la función de Lagrange puede escribirse como

$$F(\theta, \sigma^2, \delta) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \mu_{ij})^2 + \frac{1}{\sigma^2} \delta' (\mu_{ij} - \bar{\mu}_{i\bullet} - \bar{\mu}_{\bullet j} + \bar{\mu}_{\bullet\bullet})$$

Si desarrollamos “i” y “j” simultáneamente en la expresión anterior, y derivamos con respecto a los  $\mu_{ij}$ , se obtiene:

$$\tilde{\mu}_{ij} = \frac{y_{ij\bullet} + \delta_{ij}}{r} = \bar{y}_{ij\bullet} + \bar{\delta}_{ij}$$

Ahora derivemos parcialmente la función de log-verosimilitud con respecto a los  $\delta_{ij}$  para obtener el conjunto de restricciones

$$\mu_{ij} - \bar{\mu}_{i\bullet} - \bar{\mu}_{\bullet j} + \bar{\mu}_{\bullet\bullet} = 0$$

Después de hacer una sustitución y resolver para cada uno de los  $\delta_{ij}$ , se obtiene el grupo de ecuaciones

$$\bar{\delta}_{ij} = \bar{y}_{i\bullet\bullet} + \bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$$

Sustituyendo nuevamente, se obtiene el grupo de ecuaciones

$$\tilde{\mu}_{ij} = \bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, a-1 \\ j = 1, \dots, b-1 \end{array}$$

Derivemos parcialmente la función de Lagrange para obtener ahora un estimador para  $\sigma^2$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2}{abr} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \tilde{\mu}_{ij.})^2}{abr} = \frac{Q(\tilde{\mu})}{abr}$$

En el modelo no restringido se obtienen "ab" medias de celdas, mientras que en el modelo restringido se obtienen (a-1)(b-1), lo cual nos permite deducir que las medias que se excluyen son ab-(a-1)(b-1) = a + b - 1.

Entonces el estimador imparcial de  $\sigma^2$  estará dado por  $s^2 = \frac{Q(\tilde{\mu})}{abr - a - b + 1}$  además, se sabe que

$$Q(\tilde{\mu}) \sim \sigma^2 \chi^2(abr - a - b + 1).$$

$Q(\tilde{\mu})$ , recibe el nombre de suma de cuadrados residual y está escrita como la suma de dos componentes. La primera es  $Q(\hat{\mu})$  (suma de cuadrados para el modelo sin restricciones), y la segunda surge como una consecuencia del supuesto de no interacción.

Ahora, la razón de verosimilitud será

$$\gamma = \frac{\text{Max}_{\text{sujeto a } H_0=h} L(\theta, \sigma^2)}{\text{Max} L(\theta, \sigma^2)}, \quad \gamma = \left[ \frac{Q(\tilde{\mu})}{Q(\hat{\mu})} \right]^{-\frac{abr}{2}} \quad \text{o también} \quad \gamma^{2/abr} = \left[ \frac{Q(\tilde{\mu})}{Q(\hat{\mu})} \right]^{-1}$$

si se sustituyen las sumas de cuadrados en esta última expresión se obtiene

$$\gamma^{2/abr} = \left[ 1 + \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2}{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2} \right]^{-1}$$

Es conveniente recalcar que  $\hat{\theta}$  y  $\tilde{\theta}$  minimizan la suma de cuadrados  $Q(\theta)$  en los modelos sin restricciones y con restricciones y se observa que  $Q(\tilde{\theta}) \geq Q(\hat{\theta})$ , por lo tanto,  $0 \leq \gamma \leq 1$ .

Para desarrollar la prueba estadística, es conveniente expresar la diferencia,  $N_{AB} = Q_{AB}(\tilde{\mu}) - Q(\hat{\mu})$ , como una forma cuadrática con la finalidad de obtener su distribución y, si se sustituye en la razón de verosimilitud queda

$$\gamma^{2/abr} = \left[ 1 + \frac{N_{AB}}{Q(\hat{\mu})} \right]^{-1}$$

La distribución de  $N_{AB}$  se obtiene notando que  $H\hat{\theta} - h \sim N[H\theta - h, \sigma^2 H(X'X)^{-1}H']$

$$N_{AB} \sim \sigma^2 \chi^2(v, \lambda)$$

Como en nuestra hipótesis se establece que  $\mu_{ij} - \bar{\mu}_{i.} - \bar{\mu}_{.j.} + \bar{\mu}_{..} = 0$ , entonces,  $\lambda_{AB} = 0$  y se tiene que  $N_{AB}$  se distribuye como una variable aleatoria chi-cuadrada central con (a-1)(b-1) grados de libertad, es decir,

$$N_{AB} \sim \sigma^2 \chi^2[(a-1)(b-1)]$$

Sabemos que  $Q(\hat{\theta}) \sim \sigma^2 \chi^2[abr - ab]$ , por lo que el cociente

$$\frac{Q(\tilde{\mu})}{Q(\hat{\mu})} \sim F[(a-1)(b-1), abr - ab]$$

Ahora, si se considera solamente  $N_{AB}$ , toma la forma equivalente

$$N_{AB} / [(a-1)(b-1) s^2] \sim F[(a-1)(b-1), abr - ab]$$

donde  $s^2$  está dada por  $s^2 = \frac{Q(\hat{\mu})}{abr - ab}$ .

Los grados de libertad,  $(a-1)(b-1)$ , asociados con  $N_{AB}$  son dados por el rango de la matriz de hipótesis asociada con  $H_{AB}$  (recuerde que en el modelo restringido, la dimensión está dada por  $(a-1)(b-1)$  medias de celdas).

La potencia de la prueba está definida por

$$\prod[(a-1)(b-1), abr - ab] = \text{prob} \left[ \left( 1 + \frac{N_{AB}}{Q(\hat{\mu})} \right)^{-1} > F[\alpha; (a-1)(b-1), abr - ab] \right]$$

toda vez que  $F$  es central.

### Pruebas para efectos principales.

Los resultados para probar hipótesis de efectos de tratamiento A y B,  $H_A$  y  $H_B$ , respectivamente, serán desarrollados a continuación detalladamente. Los resultados de la prueba para los efectos de tratamiento B,  $H_B$ , se obtienen de manera similar a los resultados de la prueba de hipótesis para los efectos de tratamiento A,  $H_A$ , para lo cual solamente habrá que intercambiar subíndices.

Los resultados obtenidos hasta este momento se pueden resumir en lo que llamaremos **tabla de análisis de medias**. También nos referiremos a ésta, como **tabla de análisis de medias marginales**. Esta terminología que es justamente apropiada, refleja la naturaleza de las hipótesis  $H_A$  y  $H_B$ .

Descripción	Hipótesis	g. l.	S. C.	C. M.	E. C. M.
Tratamiento A	$H_A$	a-1	$N_A$	$\frac{N_A}{a-1}$	$\sigma^2 + \frac{2\sigma^2\lambda_A}{a-1}$
Tratamiento B	$H_B$	b-1	$N_B$	$\frac{N_B}{b-1}$	$\sigma^2 + \frac{2\sigma^2\lambda_B}{b-1}$
Interacción	$H_{AB}$	$(a-1)(b-1)$	$N_{AB}$	$\frac{N_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	$\sigma^2 + \frac{2\sigma^2\lambda_{AB}}{(a-1)(b-1)}$
Residuo	-	abr-ab	$Q(\hat{\mu})$	$s^2$	$\sigma^2$

### **Propuesta para comparar estadísticamente los tiempos de ejecución de algoritmos.**

1. La base de datos con que se trabajará debe elaborarse en un formato que permita la exportación a los paquetes estadísticos más usuales, toda vez que la prueba estadística se realizará con dos o más paquetes.
2. Codificar adecuadamente las variables en el paquete estadístico y con las características que se requieran para el tipo de análisis (recuerde que no todas las técnicas se pueden realizar para cualquier tipo de variable)
3. Diseñar un experimento de dos factores que cumpla con los principios básicos del diseño de experimentos. En este diseño uno de los factores a considerar es el paquete estadístico y el otro factor puede ser un algoritmo determinado en el cual puedan controlarse las iteraciones, un procedimiento de análisis que tenga varios casos, varios algoritmos a la vez, etc.
4. Ejecutar el experimento para cada uno de los niveles de factor y tomar el tiempo de ejecución para cada una de las réplicas.
5. Registrar los datos en una tabla de doble entrada.
6. Realizar la estimación de las medias de celdas y medias marginales de los datos, generando la tabla de medias de celda.
7. Con la tabla de medias realizar los cálculos de las sumas de cuadrados para los factores principales, para la interacción, para el total y el error.
8. Construir la tabla de análisis de varianza o ejecutar el procedimiento de análisis de varianza para dos factores con varias muestras por grupo en algún paquete estadístico.
9. Realizar las comparaciones necesarias a partir de la tabla de análisis de varianza y tomar la decisión sobre las hipótesis de interacción y factores principales, utilizando como elemento de contraste los valores de F o los valores de la probabilidad.
10. Realizar una prueba para la diferencia de medias, por ejemplo, la prueba t o la prueba z y, determinar un intervalo de confianza para la diferencia.
11. Si la prueba pareada es significativa y el signo de la diferencia es positivo, esto indica que el tiempo promedio de ejecución del algoritmo es mayor en el paquete estadístico 1, por lo tanto, se concluye que el paquete estadístico 2 es el mejor, toda vez que, emplea un tiempo promedio menor en la ejecución del algoritmo. Esta prueba es el complemento de la prueba de igualdad de medias de tratamientos y solamente es válida si la hipótesis de igualdad de medias es rechazada.